

Esercizio 1

Si supponga che in una determinata collettività vi siano 3 famiglie (A,B e C) che devono decidere se costruire o meno una scuola. La scuola ha un costo di costruzione di 450 e la disponibilità a pagare (=il beneficio) delle 3 famiglie è la seguente: A=250 B=200; C=50. Si ipotizzi che tutte le famiglie paghino una quota uguale del costo di costruzione e che si voti a maggioranza (1 voto per famiglia).

i) Qual è l'esito del voto?

ii) Questo esito rappresenta un miglioramento paretiano?

iii) Che cosa accadrebbe se il costo di costruzione, anziché essere suddiviso equamente tra le tre famiglie, fosse ripartito proporzionalmente al beneficio ricevuto da ciascuna famiglia dalla costruzione della scuola?

Svolgimento

i) Ogni famiglia paga

$$450/3 = 150$$

Quindi:

$$\text{beneficio netto A} = 250 - 150 = 100$$

$$\text{beneficio netto B} = 200 - 150 = 50$$

$$\text{beneficio netto C} = 50 - 150 = -100$$

Ne segue che A e B sono favorevoli, mentre C è contraria. L'esito del voto a maggioranza è quindi la costruzione della scuola.

ii) La costruzione della scuola non rappresenta un miglioramento paretiano, perché la condizione di C peggiora (il beneficio netto di C è pari a -100, ed è quindi negativo).

iii) Il beneficio totale della costruzione della scuola è dato dalla somma dei tre benefici, cioè $200 + 250 + 50 = 500$. In proporzione al beneficio totale, il beneficio di ciascuna famiglia è:

$$\text{beneficio proporzionale per A} = 250/500 = 1/2$$

$$\text{beneficio proporzionale per B} = 200/500 = 2/5.$$

$$\text{beneficio proporzionale per C} = 50/500 = 1/10.$$

La ripartizione del costo totale in proporzione ai benefici sarebbe quindi

$$\text{costo per A} = 450 * 1/2 = 225$$

$$\text{costo per B} = 450 * 2/5 = 180$$

$$\text{costo per C} = 450 * 1/10 = 45$$

da cui seguirebbe che

$$\text{beneficio netto A} = 250 - 225 = 25$$

$$\text{beneficio netto B} = 200 - 180 = 20$$

$$\text{beneficio netto C} = 50 - 45 = 5.$$

e quindi la decisione di costruire la scuola verrebbe presa all'unanimità.

Esercizio 2

Si supponga che esistano 3 tipi di elettori che debbano scegliere il livello di spesa pubblica. Le alternative sono anch'esse 3: A=alta spesa pubblica; B=media spesa pubblica; C=poca spesa pubblica. Le preferenze sono invece le seguenti (1=soluzione preferita)

	A	B	C
I tipo	1	2	3
II tipo	3	1	2
III tipo	2	3	1

- a) Ipotizzando che il voto sia a maggioranza tra coppie di alternative quale scelta si ottiene? è rispettato il principio di transitività?.
- b) Costruire un esempio in cui il cambiamento delle preferenze di 1 solo tipo di elettori genera un ordinamento non ciclico tra le 3 alternative.

Svolgimento

Le votazioni tra coppie di alternative danno il seguente esito:

- a) $\{A,B\} \Rightarrow A$
 $\{A,C\} \Rightarrow C$
 $\{B,C\} \Rightarrow B$

Non si ottiene una scelta unica: l'esito del voto è ciclico, ossia dipende da qual è la votazione che si effettua. Il principio di transitività, infatti, non è rispettato. In base a questo principio se A è preferito a B e C è preferito ad A, come in questo caso, allora C dovrebbe essere preferito a B.

- b) Ci sono molti esempi possibili. Una condizione necessaria per avere un ordinamento ciclico è che almeno un tipo di elettori abbia un picco doppio nelle preferenze. Ciò accade per le preferenze del III tipo che "ama gli estremi", ossia preferisce una spesa pubblica "bassa" o, in subordine, "alta". Se le sue preferenze fossero invece del seguente tipo C=1; B=2 A=3, ovvero a picco singolo, l'esito del voto sarebbe il seguente

- $\{A,B\} \Rightarrow B$
 $\{A,C\} \Rightarrow C$
 $\{B,C\} \Rightarrow B$

e l'alternativa scelta sarebbe B (il che conferma la validità del teorema dell'elettore mediano).

Esercizio 3

Si supponga che 3 individui (A,B e C) debbano votare in merito all'adozione di 3 progetti. Il beneficio netto ottenuto per i progetti dai singoli individui è mostrato dalla seguente tabella

	Ind. A	Ind. B	Ind. C
prog. 1	+150	-100	+100
prog. 2	-25	+200	-100
prog. 3	-200	-50	+250

Supponendo che debbano essere selezionati due progetti, e che la votazione si svolga a maggioranza confrontando le 3 coppie possibili di progetti:

- i) dire quale coppia viene scelta se non c'è la possibilità di scambio di denaro tra i tre individui;
- ii) spiegare come C può ottenere, attraverso uno scambio di denaro, che venga scelta la coppia [1,3].

Svolgimento

i) Bisogna confrontare tre possibile coppie: la coppia [1,2], la coppia [1,3] e la coppia [2,3].

Nel caso della coppia [1,2]:

-A ha un beneficio netto pari a $150-25=125$;

-B ha un beneficio netto pari a $-100+200=100$;

-C ha un beneficio netto pari a $100-100=0$.

Per la coppia [1,3]:

-A ha un beneficio netto pari a $150-200=-50$;

-B ha un beneficio netto pari a $-100-50=-150$

-C ha un beneficio netto pari a $100+250=350$.

Per la coppia [2,3]:

-A ha un beneficio netto $-25-200=-225$;

-B ha un beneficio netto $200-150=50$;

-C ha un beneficio netto $-100+250=150$.

Quindi A e B preferiscono la coppia [1,2], mentre C preferisce la coppia [1,3]. A maggioranza viene quindi scelta la coppia [1,2].

ii) C deve convincere A o B a votare per la coppia [1,3] anziché per la coppia [1,2]. La perdita che B subisce votando per la coppia [1,3] anziché per la coppia [1,2] è data da

$$-150-100=-250$$

La perdita che A subisce votando per la coppia [1,3] anziché per la coppia [1,2] è data da

$$-50-125=-175.$$

Il beneficio che C riceve dalla scelta della coppia [1,3] è invece dato da 350. Quindi C può convincere sia A sia B a votare per la coppia [1,3]. Tuttavia, la scelta che conviene a C è quella di convincere solo A, dandogli ad esempio 176 euro e conservando per sé un beneficio di $350-176=174$ euro.